

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系

一、一元二次方程的判别式

一元二次方程
判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$
(a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)，
由配方法可得

当 $\Delta =$ _____，方程有 _____ 个 _____ 的实数根

当 $\Delta =$ _____，方程有 _____ 个 _____ 的实数根

当 $\Delta =$ _____，方程 _____ 实数根

【备注】对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)，由配方法可得

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

所以：①当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根

②当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根

③当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数根

！总结：

(1) 一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ ，当 $\Delta = 0$ 时， $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ，由于是二次方程所以还是要称方程根的个数是 2，即两个相等实数根（这里深层的原因是代数基本定理，但这是一个超出中学数学范围的定理，在此不作引申），教师讲解时要注意。

(2) 当 a 、 c 异号时，一元二次方程有两个不等实数根。

通过判断判别式 Δ 的符号得到方程根的个数情况，反过来也可以通过已知的方程根的个数得到 Δ 的正负。

🍌 举个“栗”子

栗子1

💡 直接代入系数求解判别式

1. 2020~2021学年10月天津南开区天津市第五十中学初三上学期月考第4题3分 ★

一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的解得情况是 ()。

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

【备注】直接求解 Δ ，根据正负判断根的情况

【答案】C

【解析】 $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$.

$\therefore -8 < 0$,

$\therefore$ 原方程没有实数根 .

故选 : C .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

栗子2

利用根的情况求解参数的范围

2. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第15题 ★

若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根 , 则 k 的取值范围是 _____ .

【备注】一元二次方程二次项系数不能为 0 ; 一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

! 注意 :

此类型题的结果要注意范围中是否包含不等的关系 , 比如 : $\begin{cases} k \geq 3 \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 3$

【答案】 $k \leq 5$ 且 $k \neq 1$

【解析】 $\because$ 一元二次方程 $(k-1)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根 ,

$\therefore k-1 \neq 0$, 且 $b^2 - 4ac = 16 - 4(k-1) \geq 0$,

解得 : $k \leq 5$ 且 $k \neq 1$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

3. 2017~2018学年9月重庆彭水县彭水第一中学初三上学期月考第7题4分 ★★

若关于 x 的方程 $kx^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$ 有实数根 , 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $k = 0$

B. $k \geq -1$ 且 $k \neq 0$

C. $k \geq -1$

D. $k > -1$

【备注】注意审题 , 若关于 x 的方程 , 则可以为一元一次方程 $\Rightarrow k = 0$, 也可以为一元二次方程

【答案】 C

【解析】 当 $k = 0$ 时 , 方程化为 $-3x - \frac{9}{4} = 0$, 解得 $x = -\frac{3}{4}$,

当 $k \neq 0$ 时 , $\Delta = (-3)^2 - 4k \times \left(-\frac{9}{4}\right) \geq 0$, 解得 $k \geq -1$,

所以 k 的范围为 $k \geq -1$.

故选 C .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

4. 2017~2018学年10月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第17题3分 ★★

如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x - 1 = 0$ 没有实数根，那么 k 的取值范围是 _____ .

【备注】 与二次根式结合，注意参数的取值范围，最终取不等式组的解集

【答案】 $-\frac{1}{2} \leq k < -\frac{1}{6}$

【解析】 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x - 1 = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \begin{cases} k \neq 0 \\ 2k+1 \geq 0 \\ \Delta = (-\sqrt{2k+1})^2 + 4k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \geq -\frac{1}{2} \\ k < -\frac{1}{6} \end{cases},$$

$\therefore k$ 的取值范围为 $-\frac{1}{2} \leq k < -\frac{1}{6}$.

【标注】 【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

5. 2019~2020学年天津和平区初三上学期期中第11题3分 ★★★

已知 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0$ 是两个关于 x 的一元二次方程，下列判断不正确的是 () .

- A. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根，那么方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 也有两个实数根
- B. 如果 m 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，那么 $\frac{1}{m}$ 是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的一个根
- C. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等，那么这个根是 1
- D. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等，那么这个根是 1 或 -1

【备注】 这道题要明确“如果…”相当于已知条件，我们要去判断“那么…”这部分是否一定成立；其中 B、C、D 选项的思路在后续二次函数图象与系数中还会考察，这部分要注意打好基础。

【答案】 C

【解析】 A 选项： $\because$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数

根，

$$\therefore b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\therefore b^2 - 4ca \geq 0,$$

$\therefore$ 方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 也有两个实数根，

故 A 正确；

B 选项： $\because m$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个

根， $c \neq 0$ ，

$$\therefore am^2 + bm + c = 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore c\left(\frac{1}{m}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{m} + a &= 0, \\ \therefore \frac{1}{m} &\text{是 } cx^2 + bx + a = 0 \text{ 的一根,} \\ \therefore \text{故 B 正确;} \end{aligned}$$

C 选项：由题意知， $a \neq c$ ，设相等的根是 m ，

$$\text{则 } am^2 + bm + c = 0 \text{ ①, } cm^2 + bm + a = 0 \text{ ②,}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } am^2 - cm^2 + c - a = 0,$$

$$\therefore (a - c)(m^2 - 1) = 0,$$

$$\therefore a \neq c,$$

$$\therefore a - c \neq 0,$$

$$\therefore m = \pm 1,$$

$\therefore$ 故 C 错误；

D 选项：根据选项 C 结论得，故 D 正确。

故选 C。

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

栗子3

判别式与方程的根综合

6. 2019~2020 学年天津南开区初三上学期期中第 19 题 8 分 ★★★

已知，关于 x 的方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 。

(1) 当 $m - n = 4$ 时，判断方程根的情况。

(2) 若方程有两个相等的实数根，当 $n = 2$ 时，求此时方程的根。

【备注】对于 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是可以进行配方整理为 $x^2 + a$ ($a \geq 0$) 的形式，即可得到 $\Delta \geq 0$ 。已知方程根的情况，求出参数的关系或值，再解方程。

【答案】(1) 一元二次方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个不相等的根。

(2) 1 或 -1。

【解析】(1) $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-m)^2 - 4 \times 2 \times n$$

$$= m^2 - 8n,$$

$$\because m - n = 4,$$

$$\therefore n = m - 4,$$

$$\Delta = m^2 - 8n$$

$$= m^2 - 8(m - 4)$$

$$= m^2 - 8m + 32$$

$$= (m - 4)^2 + 16 ,$$

$$\because (m - 4)^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore (m - 4)^2 + 16 > 0 ,$$

$$\therefore \Delta > 0 ,$$

即关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个不相等的根 .

(2) 方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个相等的根 ,

$$\Delta = m^2 - 8n = 0 ,$$

$$\because n = 2 ,$$

$$\therefore m^2 - 8 \times 2 = 0 ,$$

$$m^2 = 16 ,$$

$$m = \pm 4 ,$$

$$m_1 = 4 , m_2 = -4 .$$

① $m_1 = 4 , n = 2$ 时 ,

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 ,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 ,$$

$$(x - 1)^2 = 0 ,$$

$$x_1 = x_2 = 1 ;$$

② $m_1 = -4 , n = 2$ 时 ,

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 ,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 ,$$

$$(x + 1)^2 = 0 ,$$

$$x_1 = x_2 = -1 .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

7. 2019~2020学年10月天津和平区耀华嘉诚国际中学初三上学期月考第19题8分 ★★★

已知 , 关于 x 的方程 $(m - 1)x^2 - (m - 2)x + \frac{1}{4}m = 0$.

(1) 当 m 取何值时方程有一个实数根 ?

(2) 当 m 取何值时方程有两个实数根 ?

【备注】注意第 (1) 小问 , 方程有一个实数根是指该方程为一元一次方程 ; 当 $\Delta = 0$ 时 , 我们说一元二次方程有两个相等的实数根而不是一个。

【答案】 (1) $m = 1$.

(2) $m \leq \frac{4}{3}$, 且 $m \neq 1$.

【解析】(1) 当 $m-1=0$ ，即 $m=1$ 时，该方程为一元一次方程，

方程有一个实数根： $x = -\frac{1}{4}$ 。

(2) 当 $m-1 \neq 0$ ，即 $m \neq 1$ 时，该方程为一元二次方程；

当 $\Delta = [-(m-2)]^2 - 4(m-1) \times \frac{1}{4}m \geq 0$ 时，方程有两个实数根；

解得： $m \leq \frac{4}{3}$ ，且 $m \neq 1$ ，当 $m \leq \frac{4}{3}$ ，且 $m \neq 1$ 时方程有两个实数根。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

栗子4

与三角形综合

8. 2019~2020学年10月四川凉山西昌市西昌市阳光学校初三上学期月考第23题5分 ★★★

已知整数 $k < 5$ ，若 $\triangle ABC$ 的边长均满足关于 x 的方程 $x^2 - 3\sqrt{k}x + 8 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长是 _____。

【备注】与三角形进行结合，注意解方程后验证三角形三边关系是否满足

【答案】6或12或10

【解析】根据题意得： $k \geq 0$ 且 $(3\sqrt{k})^2 - 4 \times 8 \geq 0$ ，

解得 $k \geq \frac{32}{9}$ ，

$\because$ 整数 $k < 5$ ，

$\therefore k = 4$ ，

$\therefore$ 方程变形为 $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，

解得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = 4$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的边长为 2、2、2 或 4、4、4 或 4、4、2，

$\therefore$ 周长为 6 或 12 或 10。

故答案为：6 或 12 或 10。

【标注】【知识点】与三角形三边关系结合

独步天下1

整数解问题

9. 2013~2014学年江苏南京鼓楼区初三上学期期中第23题8分 ★★★

已知：关于 x 的方程 $kx^2 - (4k+1)x + 3k+3 = 0$ 。

(1) 请说明：此方程必有实数根。

(2) 若 k 为整数, 且该方程的根都是整数, 直接写出 k 的值.

【备注】 如果 Δ 为完全平方公式, 可以确定一点, 方程的根可以直接求解.

求解的方法有两种: **因式分解法、公式法**.

① 因式分解法: 常用十字相乘法;

② 公式法: 可以直接代入求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

求出解后, 化成分子为常数的分式的形式, 根据整数根, 分子和分母的整除关系, 求出符合题意的整数根.

用求根公式解整数根问题用到的方法是分离常数法, 目的是把分子上的字母拆分出来, 只讨论分母中的字母什么时候取值, 能让式子变为一个整数.

! 拓展:

① 若解得 $x = \frac{2}{k+1}$, 则 $k+1 = \pm 1, \pm 2$, 再求解.

② 若解得 $x = \frac{2k+2}{k}$, 则化简为 $x = 2 + \frac{2}{k}$, 则 $k = \pm 1, \pm 2$, 再求解.

③ 若解得 $x = \frac{2k^2+2}{k}$, 则化简为 $x = 2k + \frac{2}{k}$, 则 $k = \pm 1, \pm 2$, 再求解.

④ 若解得 $x = \frac{k^2+2}{k+1}$, 则化简为 $x = \frac{k^2-1+3}{k+1} = \frac{k^2-1}{k+1} + \frac{3}{k+1} = k-1 + \frac{3}{k+1}$, 则 $k+1 = \pm 1, \pm 3$, 再求解.

⑤ 若解得 $x = \frac{2k^2+2}{k+1}$, 则化简为

$x = \frac{2(k^2-1)+4}{k+1} = \frac{2(k+1)(k-1)}{k+1} + \frac{4}{k+1} = 2(k-1) + \frac{4}{k+1}$, 则 $k+1 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$, 再求解.

其中①、②较为常见, ③、④、⑤可以给程度较好的学员进行拓展.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 0, 1或-1.

【解析】 (1) 当 $k=0$ 时, 方程为一元一次方程, 即 $-x+3=0$, 解得 $x=3$, 符合题意;

当 $k \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程,

其判别式 $b^2-4ac = (4k+1)^2 - 4k(3k+1) = (2k+1)^2 \geq 0$, 恒有实数根,

综上所述, 此方程必有实数根.

(2) ① $k=0$ 时, 方程有根为 3, 符合题意;

② $k \neq 0$ 时, 方程可化为 $(x-3)(kx-k-1)=0$,

即 $x_1=3, x_2=\frac{k+1}{k}$,

$x_2=\frac{k+1}{k}=1+\frac{1}{k}$, 若 k 与方程根都是整数, 则 k 只可以是 1 或 -1,

综上所述, k 的值为 0, 1 或 -1.

【标注】 【知识点】一元二次方程根的判别式

二、一元二次方程的根系关系

探究：

从因式分解法可知，方程 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (x_1 、 x_2 为已知数) 的两根为 x_1 和 x_2 ，将方程化为一般式后，你能说一说两个根和系数之间的关系吗？

【备注】 将原方程化简可得： $(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$
设该一元二次方程的一般式为： $x^2 + px + q = 0$
所以 $x_1 + x_2 = -p$ ， $x_1x_2 = q$ 。

上述探究针对于二次项系数为 1 的一元二次方程，现在我们拓展到一般式

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 中继续探究：

当 $\Delta \geq 0$ ，即方程有实数根，由 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 可知，

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}.$$

！ 总结：

因此，方程的两个根 x_1 ， x_2 和系数 a ， b ， c 有如下关系：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

【备注】 根与系数的关系即**韦达定理**：任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比。

！ 几个重要的变形：

$$\textcircled{1} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$\textcircled{2} (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

$$\textcircled{3} |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2};$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}.$$

根与系数关系常见应用场景：

1. 不解方程，求与方程的根有关的代数式的值；
2. 已知方程的一个根，求方程的另一个根；
3. 与根的判别式相结合，解决一些综合题。

 举个“栗子”

 栗子5

 直接利用根系关系计算

10. 2020~2021学年11月四川凉山西昌市西昌一中俊波外国语学校初三上学期月考第19题6分 ★★★

关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围 .

(2) 若 $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 10 = 0$, 求 m 的值 .

【备注】 直接表示出两边之和与两边之积 , 然后根据已知条件求出参数的值

【答案】 (1) $m \leq \frac{13}{4}$.

(2) -3 .

【解析】 (1) $\because$ 有两个实数根 .

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 ,$$

$$\therefore 3^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) \geq 0 ,$$

$$9 - 4m + 4 \geq 0 ,$$

$$-4m \geq -13 ,$$

$$m \leq \frac{13}{4} ,$$

$$\therefore m \text{ 的范围 : } m \leq \frac{13}{4} .$$

(2) $\because$ 方程有两个实数根 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 ,$$

$$\therefore \text{原式 : } 2 \times (-3) + (m - 1) + 10 = 0 ,$$

$$-6 + m - 1 + 10 = 0 ,$$

$$m = -3 ,$$

$$\therefore m \text{ 的值为 : } -3 .$$

【标注】 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子6

 不解方程求方程的根

11. 2017~2018学年9月内蒙古呼和浩特玉泉区呼和浩特市第十二中学初三上学期月考第7题3分 ★★

如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别为 $x_1 = 3, x_2 = 1$, 那么这个一元二次方程是 () .

A. $x^2 + 3x + 4 = 0$

B. $x^2 + 4x - 3 = 0$

C. $x^2 - 4x + 3 = 0$

D. $x^2 + 3x - 4 = 0$

【备注】 利用根系关系验证每个方程是否满足

【答案】 C

【解析】方程两根分别为 $x_1 = 3$, $x_2 = 1$,

则 $x_1 + x_2 = -p = 3 + 1 = 4$, $x_1 x_2 = q = 3$,

$\therefore p = -4$, $q = 3$,

$\therefore$ 原方程为 $x^2 - 4x + 3 = 0$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

12. 2020~2021学年9月天津红桥区天津市方舟中学初三上学期月考第14题3分 ★

已知 $x_1 = 3$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根, 则方程的另一个根 x_2 是 _____ .

【备注】方程中已知“ a 、 b ”的值, 则利用两根之和的关系, 直接求出另一个根.

【答案】 1

【解析】设方程另一个根是 x_2 ,

则有: $3 + x_2 = 4$,

解得 $x_2 = 1$,

故另一个根是 1 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

13. 2020~2021学年9月天津武清区英华国际中学初三上学期月考第2题 ★

关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0 , 则 a 的值为 () .

A. 1

B. -1

C. 1或-1

D. $\frac{1}{2}$

【备注】已知方程的一个根为 0 , 则 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 0$, 求解参数的值, 注意二次项系数不为 0 .

【答案】 B

【解析】 $\because x = 0$ 是 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根 .

$\therefore a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$,

$\because$ 方程是一元二次方程 ,

$\therefore a - 1 \neq 0$,

$a \neq 1$,

则 $a = -1$.

故选: B .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

 韦达定理与方程的根综合

14. 2014年内蒙呼和浩特中考真题第15题3分 ★★★

已知 m, n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 - mn + 3m + n =$ _____ .

【备注】 先将方程的根代入, 然后再利用韦达定理求解

【答案】 8

【解析】 $\because m, n$ 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore mn = -5, m + n = -2.$$

$$\because m^2 + 2m - 5 = 0,$$

$$\therefore m^2 = 5 - 2m.$$

$$m^2 - mn + 3m + n = (5 - 2m) - (-5) + 3m + n$$

$$= 10 + m + n$$

$$= 10 - 2$$

$$= 8.$$

故答案为 8.

【标注】 【知识点】利用根求代数式的值

15. 2017~2018学年10月天津和平区天津市耀华中学初三上学期月考第10题3分 ★★★

设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两根, 则 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值为 () .

A. 1

B. -1

C. 0

D. 2

【备注】 求解高次代数式的思想: **降次**

此题涉及到立方和差公式: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

【答案】 C

【解析】 $\because x_1, x_2$ 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两根,

$$\therefore x_1^2 + x_1 = 3, x_2^2 = 3 - x_2, x_1 + x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1^3 - 4x_2^2 + 19 = x_1^3 - 1 - 4x_2^2 + 20$$

$$= (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 1) - 4(3 - x_2) + 20$$

$$= (x_1 - 1)(3 + 1) - 4(3 - x_2) + 20$$

$$= 4(x_1 - 1) - 4(3 - x_2) + 20$$

$$= 4(x_1 + x_2) + 4$$

$$= -4 + 4$$

$$= 0 .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子8

根系关系的变形

16. 2018~2019学年10月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第11题3分 ★★★

关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 7$, 则 $(x_1 - x_2)^2$ 的值是 () .

A. 1

B. 12

C. 9

D. 25

【备注】此题需要利用完全平方公式与根系关系进行变形： $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

【答案】C

【解析】∵关于 x 的方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2 \times (-1) = m^2 + 2 = 7,$$

$$m_1 = \sqrt{5}, m_2 = -\sqrt{5},$$

∴方程有 2 个实数根,

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0 \text{ 恒成立},$$

$$\therefore m_1 = \sqrt{5}, m_2 = -\sqrt{5} \text{ 均满足条件},$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 - 4 \times (-1) = 5 + 4 = 9.$$

故选 C.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

17. 2019~2020学年9月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第21题10分 ★★★

已知 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两实数根, 求下列各式的值:

(1) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.

(2) $(x_1 - x_2)^2$.

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

【备注】(1) 需要先利用提取公因式法进行因式分解, 讲解时可以再复习下因式分解的方法:

①提取公因式法 ②乘法公式法 ③十字相乘法 ④分组分解法

(2) 利用两个完全平方公式的等量关系求解: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

(3) 利用分式加减的运算法则计算：先通分，然后分子相加减

【答案】 (1) $\frac{5}{4}$.
(2) $\frac{17}{4}$.
(3) $\frac{21}{2}$.

【解析】 (1) $\because x_1, x_2$ 是方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$$

$$= x_1 x_2 (x_2 + x_1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{4} .$$

(2) $(x_1 - x_2)^2$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 2$$

$$= \frac{17}{4} .$$

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{25}{4} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{21}{2} .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

18. 2019年广东广州海珠区中山大学附属中学初三中考一模第21题12分 ★★★

已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2 = 0$.

(1) 若方程有实数根，求实数 m 的取值范围 .

(2) 若方程两实数根分别为 x_1 、 x_2 ，且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|$ ，求实数 m 的值 .

【备注】 此题中出现了 $|x_1 x_2|$ ，根据 $|x_1 x_2| = m^2 + 2 \geq 0$ ，解方程即可 .

【答案】 (1) $m \geq -\frac{1}{12}$.

(2) $m = 2$

【解析】(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0, \text{ 即 } (2m+3)^2 - 4(m^2+2) \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -\frac{1}{12}.$$

(2) 根据题意得 $x_1 + x_2 = 2m+3$, $x_1x_2 = m^2+2$,

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1x_2|,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 31 + |x_1x_2|,$$

$$\text{即 } (2m+3)^2 - 2(m^2+2) = 31 + m^2 + 2,$$

$$\text{解得 } m = 2, m = -14 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore m = 2.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

栗子9

逆用一元二次方程的定义构造方程

19. 2020~2021学年10月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第8题3分 ★★

若实数 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$, 则代数式 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1}$ 的值为 () .

A. -20

B. 2

C. 2或-20

D. 2或20

【备注】若两个参数同时满足一个相同类型 (除未知数外其余完全相同) 的方程, 则可得到这两个参数为该方程的两根, 然后利用韦达定理推导即可.

【答案】A

【解析】 $\because a, b$ 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$,

$\therefore a, b$ 可看作方程 $x^2 - 8x + 5 = 0$ 的两根,

$$\therefore a + b = 8, ab = 5,$$

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1} &= \frac{(b-1)^2 + (a-1)^2}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 2ab - 2(a+b) + 2}{ab - (a+b) + 1} \\ &= \frac{8^2 - 2 \times 5 - 2 \times 8 + 2}{5 - 8 + 1} \end{aligned}$$

$$= -20.$$

故选 A.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

20. ★★★

若 $ab \neq 1$ ，且有 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 及 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____。

【备注】 此题可先观察两个方程的异同点：一次项系数相同，二次项系数与常数项呈对称关系，则通过方程左右两侧同除以 b^2 化为相同方程，然后再进行构造

【答案】 $\frac{9}{5}$

【解析】 由 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 可知， $a \neq 0$ ，故 $9\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 2001 \cdot \frac{1}{a} + 5 = 0$ 。

又 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ ， $ab \neq 1 \Rightarrow a \neq \frac{1}{b}$ ，故 b 、 $\frac{1}{a}$ 是方程 $9x^2 + 2001x + 5 = 0$ 的两根，从而可知 $b \cdot \frac{1}{a} = \frac{5}{9}$ ，则 $\frac{a}{b} = \frac{9}{5}$ 。

【标注】 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子10

逆用根系关系构造方程

21. ★★

设 $x^2 - px + q = 0$ 的两实数根为 α 、 β ，那么 α^2 、 β^2 为两根的一元二次方程是 _____。

【备注】 先根据题中方程求解出根系的关系，再利用韦达定理的变形推导出 $\alpha^2 + \beta^2$ 、 $\alpha^2\beta^2$ 的值

【答案】 $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$

【标注】 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

独步天下2

22. 2017年北京西城区北京四中初三自主招生第14题10分 ★★★

已知 x 、 y 均为实数，且满足 $xy + x + y = 17$ ， $x^2y + xy^2 = 66$ 。求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值。

【备注】 对于复杂的根系关系可利用换元法求解：令 $u = x + y$ ， $t = xy$ ，构造一个以 u 、 t 为两根的方程，解方程求出 u 、 t 的值，然后利用降次思想求出代数式的值

【答案】 12499

【解析】 由已知 $xy + x + y = 17$ ， $x^2y + xy^2 = 66$ ，

所以 xy 和 $x + y$ 是方程 $t^2 - 17t + 66 = 0$ ① 的两个实数根。

解方程①得 $t_1 = 6$ ， $t_2 = 11$ 。即 $xy = 6$ ， $x + y = 11$ ；或者 $xy = 11$ ， $x + y = 6$ 。

当 $xy = 6$ ， $x + y = 11$ 时， x 、 y 是方程 $u^2 - 11u + 6 = 0$ ② 的两个根。

因为 $\Delta_1 = (-11)^2 - 4 \times 6 > 0$, 所以方程②有实数根 .

这时 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 11^2 - 2 \times 6 = 121 - 12 = 109$.

$$\begin{aligned}x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^3y + xy^3 \\&= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 + xy(x^2 + y^2) \\&= 109^2 - 6^2 + 6 \times 109 = 12499 .\end{aligned}$$

当 $xy = 11$, $x + y = 6$ 时 , x 、 y 是方程 $v^2 - 6v + 11 = 0$ ③的两个根 .

因为 $\Delta_2 = (-6)^2 - 4 \times 11 < 0$, 所以方程③没有实数根 .

综上所述可知 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值为 12499 .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式